**Exercício 24 (capítulo 4 do livro):** Uma empresa dedica-se ao comércio de diversos artigos, cujas vendas têm comportamentos aleatórios. As vendas mensais dos artigos $A$ e $B$, expressas em unidades monetárias, constituem um vector aleatório $(X, Y)$ com função densidade

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1/2, & 0 < x < 2, 0 < y < x \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}.$$

(a) Calcule a média e a variância de $X$ e de $Y$.

**Solução:** Usando a definição de valor esperado marginal de $X$ e de $Y$, obtemos o seguinte

$$E(X) = \int_0^2 \int_0^x \frac{x}{2} dy dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{4}{3}$$
$$E(Y) = \int_0^2 \int_0^x \frac{y}{2} dy dx = \int_0^2 \left[\frac{y^2}{4}\right]_0^x dx = \int_0^2 \frac{x^2}{4} dx = \left[\frac{x^3}{12}\right]_0^2 = \frac{2}{3}$$

Para calcular as variâncias precisamos de calcular ainda

$$E(X^2) = \int_0^2 \int_0^x \frac{x^2}{2} dy dx = \int_0^2 \frac{x^3}{2} dx = \left[\frac{x^4}{8}\right]_0^2 = 2$$
$$E(Y^2) = \int_0^2 \int_0^x \frac{y^2}{2} dy dx = \int_0^2 \left[\frac{y^3}{6}\right]_0^x dx = \int_0^2 \frac{x^3}{6} dx = \left[\frac{x^4}{24}\right]_0^2 = \frac{2}{3}$$

Logo,

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}$$
$$Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$$

(b) Estude a independência das variáveis e determine o coeficiente de correlação.

**Solução:** Para calcularmos o coeficiente de correlação temos de começar por calcular a covariância.

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Uma vez que já conhecemos $E(X)$ e $E(Y)$ temos de calcular o $E(XY)$:

$$E(XY) = \int_0^2 \int_0^x \frac{xy}{2} dy dx = \int_0^2 x \left[\frac{y^2}{4}\right]_0^x dx = \int_0^2 \frac{x^3}{4} dx = \left[\frac{x^4}{16}\right]_0^2 = 1,$$

de onde concluímos que

$$Cov(X,Y) = 1 - \frac{4}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{9}.$$

Daqui já podemos concluir que as variáveis aleatórias não são independentes (pois a $Cov(X,Y) \neq 0$).

O coeficiente de correlação pode então ser calculado por

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{1/9}{\sqrt{2/9 \times 2/9}} = \frac{1}{2}.$$

(c) Obtenha a média da variável $Y$ condicionada por $X = 1$.

**Solução:** Para calcularmos o valor esperado de $Y$ condicionado à informação $X = 1$, precisamos de calcular a função dencidade de $Y$ condicionado à informação $X = 1$.

$$f_{Y|X=1}(y) = \begin{cases} \frac{f_{X,Y}(1,y)}{f_X(1)}, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1/2}{1/2}, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} = \begin{cases} 1, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

onde a função densidade marginal de $X$ pode ser obtida da seguinte forma

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_0^x f_{X,Y}(x,y)dy, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}.$$

Pode-se agora calcular o valor esperado condicionado:

$$E(Y|X = 1) = \int_0^1 y f_{Y|X=1}(y)dy = \int_0^1 ydy = \frac{1}{2}.$$

- Determine a média a variaância do total das vendas dos dois artigos em causa.

  **Solução:** O total das vendas dos dois artigos pode ser representado por $X+Y$. Assim,

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2$$
$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + 2 \times \frac{1}{9} = \frac{2}{3}.$$